

L'inégalité isopérimétrique

1. Soient L un réel strictement positif et f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , continue et \mathcal{C}^1 par morceaux et périodique de période L . Montrer que

$$\frac{1}{L} \int_0^L \overline{f(s)} f'(s) \, ds = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(f').$$

2. En déduire que

$$\left| \int_0^L \overline{f(s)} f'(s) \, ds \right| \leq \frac{L}{2\pi} \int_0^L |f'(s)|^2 \, ds.$$

3. Soit γ une courbe de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, continue, \mathcal{C}^1 par morceaux (on notera par I l'ensemble des points où γ n'est pas dérivable), fermée (c'est-à-dire $\gamma(0) = \gamma(1)$) et sans point multiple (c'est-à-dire γ est injective sur $[0, 1[$). On suppose également que γ' ne s'annule pas sur $[0, 1] \setminus I$. La longueur totale de la courbe sera désignée par L :

$$L := \int_0^1 |\gamma'(t)| \, dt.$$

On définit ϕ sur $[0, 1]$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \phi(t) = \int_0^t |\gamma'(u)| \, du.$$

Montrer que ϕ est une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, L]$ et que ϕ et ϕ^{-1} sont dérivables sur $[0, 1] \setminus I$ et $[0, L] \setminus \phi(I)$ respectivement.

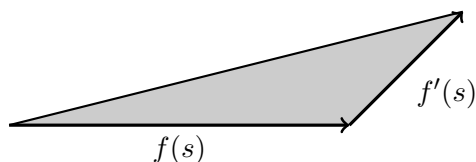
4. On définit f sur $[0, L]$ par,

$$\forall s \in [0, L], \quad f(s) = \gamma(\phi^{-1}(s)).$$

Montrer que f est une fonction de $[0, L]$ dans \mathbb{C} , continue, \mathcal{C}^1 par morceaux, fermée, sans point multiple et vérifiant

$$\forall s \in [0, L] \setminus \phi(I), \quad |f'(s)| = 1.$$

5. Justifier que l'aire du triangle suivant :



est donnée par : $\frac{1}{2} \det(f(s), f'(s))$, où $f(s)$ et $f'(s)$ sont vus comme des vecteurs de \mathbb{R}^2 .

6. On considère les deux exemples suivants de courbes. Pour $L > 0$ fixé et $L/2 > a > 0$:

$$f_1(s) = \begin{cases} s & \text{si } s \in [0, a] \\ a + i(s - a) & \text{si } s \in [a, L/2] \\ a + \frac{L}{2} - s + i\left(\frac{L}{2} - a\right) & \text{si } s \in [L/2, a + L/2] \\ i(L - s) & \text{si } s \in [a + L/2, L] \end{cases}$$

et

$$f_2(s) = \frac{L}{2\pi} e^{i\frac{2\pi}{L}s} \quad \forall s \in [0, L].$$

Tracer ces deux courbes et vérifier que f_1 et f_2 satisfont les mêmes hypothèses que f .

7. On note \mathcal{A} l'aire du domaine intérieur délimité par la courbe f . Vérifier la formule de Stokes

$$\mathcal{A} = \left| \int_0^L \frac{1}{2} \det (f(s), f'(s)) ds \right|,$$

pour les deux exemples f_1 et f_2 .

8. Montrer que

$$\mathcal{A} = \left| \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_0^L \overline{f(s)} f'(s) ds \right) \right|.$$

9. En déduire l'inégalité isopérimétrique :

$$4\pi\mathcal{A} \leq L^2.$$

10. Montrer que l'on a égalité $4\pi\mathcal{A} = L^2$ si et seulement si la courbe est un cercle.